OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a V – a

1. FELADAT Határozzátok meg az a, b, c, d, e természetes számok összegét, melyekre, a következő számpárok mindegyikében a két szám különbsége a lehető legkisebb:

$$(3a,\ 2023),\quad (7b+5,\ 2023),\quad (13c+5,\ 2023),\quad \left(d^2,\ 2023\right),\quad \left(2^e,\ 2023\right).$$

(Például, a $(4, 9)$ számpárban a különbség $9 - 4$, a $(14, 9)$ számpárban a különbség $14 - 9$)

2. FELADAT Az $1, 2, 3$ és 4 számjegyeket felhasználva két különböző négyjegyű számot alkotunk, mindegyik négy különböző számjegyből áll. Mutassátok ki, hogy az így alkotott számok egyike sem osztható a másik számmal.

3. FELADAT

a) Írjátok fel a 252525 számot 6 egymástól és nullától különböző négyzetszám összegeként;

b) Bionyítsátok be hogy létezik legalább 27 olyan $\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2022\ számjegy}$ alakú szám amelyik felírható 2022 egymástól és nullától különböző négyzetszám összegeként.

4. FELADAT Egy táblára felírtunk 3 egymástól és nullától különböző természetes számot.

- Andra elosztja 6-tal mind a három számot és a kapott maradékok egyenlőek 1-gyel vagy 3-mal;
- Carla összeadja páronként a számokat és az így kapott összegeket elosztja 6-tal. A kapott maradékok egyenlőek 0-val vagy 4-gyel, legalább egyszer kapja mindkét maradákot;
- Matei összeadja a három számot és a kapott összeget elosztja 6-tal.

a) Mennyi a Matei általl kapott maredék?

b) Határozzátok meg a táblára írt számokat, tudva, hogy a két kisebb szám összege 82, a két nagyobb szám összege 96.

[1] Tényleges munkaidő: 2 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VI – a

1. FELADAT Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az O pont körül megszerkesztjük az A_1OA_2, A_2OA_3, $A_3OA_4, \ldots$, $A_{23}OA_1$, szögeket úgy, hogy $\sphericalangle A_1OA_2 = 1^\circ$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 2^\circ$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 3^\circ, \ldots, \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 22^\circ$, és $\sphericalangle A_{23}OA_1 = n^\circ$. Igazoljátok, hogy:

a) $\sphericalangle A_{23}OA_1$ egy tompa szög;

b) az $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$ és $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$ szögek szögfelezői merőlegesek egymásra;

c) OA_5 és OA_{20} félegyenesek ellentétes félegyenesek.

2. FELADAT Legyen x és y két nullától különböző természetes szám, melyekre $\dfrac{x+5}{y} = \dfrac{x}{y-7}$.

a) Bizonyítsátok be, hogy $5|x$ és $7|y$;

b) Határozzátok meg az $\dfrac{y}{x}$ arány legnagyobb lehetséges értékét.

3. FELADAT A matematikatanár felírja a táblára a következő számjegyeket: $1, 1, 1, 8, 8, 8$. Alexandra kimegy a táblához és felírja az összes 6-jegyű számot melyek mindegyike a tanár által felírt összes számjegyet tartalmazza.

a) Igazoljátok, hogy az Alexandra által felírt számok összege osztható 63-mal;

b) Határozzátok meg az Alexandra által felírt számok legnagyobb közös osztóját.

4. FELADAT Andrei apukájának egy 36 golyót tartalmazó urnája van. A golyók meg vannak számozva 1-től 36-ig. Az apuka kiválaszt találomra 6 golyót. Andreinek rendelkezésére áll 9 kartonlap amelyek mindegyikére fel kell írjon 6 természetes számot 1-től 36-ig. Egy kartonlapot nyertesnek nevezünk ha nem tartalmazza az apukája által kihúzott számok egyikét sem. Hogy kimehessen játszani, Andrei legalább egy nyertes kartonlappal kell rendelkezzen. Találhat Andrei egy olyan stratégiát a kartonlapok kitöltésére, hogy kimehessen játszani? Indokoljátok a választ.

[1] Tényleges munkaidő: 2 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VII – a

1. FELADAT

a) Határozzátok meg a p és q racionális számokat tudva, hogy
$$p\left(\sqrt{12}-1\right)+q\left(5-\sqrt{108}\right)=p-1;$$

b) Adott a következő valós szám $a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}$.

Határozzátok meg a legkisebb n természetes számot amelyre $a \leq n$.

2. FELADAT Bizonyítsátok be, hogy:

a) Ha egy n páratlan természetes szám, akkor az n^2 szám 4-gyel való osztási maradéka 1;

b) Ha p és q prímszámok (törzsszámok), akkor $\sqrt{p^2+2q^2}$ egy irracionális szám;

c) Végtelen sok olyan (p,q) nullától különböző természetes számpár létezik, amelyekre a $\sqrt{p^2+2q^2}$ egy racionális szám.

3. FELADAT Legyen M az $ABCD$ négyzet $[AB]$ oldalának felezőpontja és N a $[BC]$ oldal felezőpontja, $AN \cap DM=\{P\}$ és $CP \cap AB=\{Q\}$.

a) Bizonyítsátok be, hogy a $PMBN$ négyszög körbeírható.

b) Ha $AB=8\ cm$, számítsátok ki AQ-t.

4. FELADAT Egy 2023 cm oldalhosszúságú négyzetet felbontunk 2023^2 egyenként 1 cm oldalhosszúságú négyzetekre. Az így keletkezett négyzetek közül n négyzetnek a középpontját kiszínezzük kékkel.

a) Mutassátok ki, hogy ha $n=4045$, akkor ki lehet úgy színezni, hogy bármely négy pontot vennénk a kék pontok közül, ők ne legyenek egy paralelogramma csúcspontjai.

b) Mutassátok ki, hogy ha $n=4046$, akkor bárhogy is színeznénk, mindig léteik négy kék pont melyek egy paralelogramma csúcspontjai.

[1]Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2]Minden feladat kötelező;
[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VIII – a

1. FELADAT Határozd meg azokat a p prímszámokat, amelyekre $2p^2 - 3p + 1$ teljes négyzet.

2. FELADAT Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben, ahol $AB = 12\ cm$ és $BC = BB' = 6\sqrt{2}\ cm$, legyenek M és N az AB, illetve $C'D'$ szakaszok felezőpontjai.

a) Igazold, hogy $(A'DN) \parallel (B'CM)$;

b) Igazold, hogy $BD' \perp (B'CM)$;

c) Határozd meg az $(A'DN)$és $(B'CM)$ síkok közötti távolságot.

3. FELADAT Igazold, hogy:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} > ab$, bármely a és b egymástól különböző valós szám esetén;

b) $\dfrac{1}{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1} + \dfrac{1}{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1} + ... + \dfrac{1}{2 \cdot 2022^2 + 2 \cdot 2022 + 1} < \dfrac{1011}{2023}$.

4. FELADAT Legyenek A, B, C, D négy nem egy síkban lévő pontok, E és F az AC, illetve BD szakaszok felezőpontjai úgy, hogy $AD = BC$, $AC = BD = 2\sqrt{15}\ cm$, illetve $2EF = AB = CD = = 2\sqrt{5}\ cm$.

a) Igazold, hogy a DEB háromszög egyenlő szárú;

b) Számítsd ki az AC és BD egyenesek közötti távolságot;

c) Határozd meg az AC és BD egyenesek által meghatározott szöget.

[1]Tényleges munkaidő: 3 óra;

[2]Minden feladat kötelező;

[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a IX – a

1. FELADAT Határozzátok meg az $m, n \in \mathbb{N}$ természetes számokat úgy, hogy a $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{5}}{\sqrt{n}+1}$ racionális szám legyen.

2. FELADAT Oldjátok meg az $[x]^2 + 4x + \{x\} + \sqrt{3} = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

3. FELADAT Igazoljátok, hogy:

a) Ha $a, b, c \in (0, +\infty)$, akkor teljesül az $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ egyenlőtlenség;

b) Ha $a, b, c \in (0, +\infty)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}+2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} \geq 1.$$

4. FELADAT Az ABC háromszögben az oldalak hossza legyen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ és $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ a háromszög szögfelezőinek talppontja. Igazoljátok, hogy:

a) $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) Az ABC háromszög egyenlő oldalú akkor és csak akkor, ha $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

[1]Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2]Minden feladat kötelező;
[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a X – a

1. FELADAT

a) Határozzátok meg a $z \in \mathbb{C}$ azon értékeit, amelyekre $z^2 + 2|z|^2 - 4 = 0$.

b) Igazoljátok, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ és $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ úgy, hogy $az^2 + bz + c = 0$, akkor $|z| < 2\left|\dfrac{c}{b}\right|$.

2. FELADAT Ha $z \in \mathbb{C}$ és $|z| = 1$, akkor igazoljátok, hogy:

a) $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$;

b) $2 \leq |z + 1| + |z - 1| \leq 2\sqrt{2}$.

3. FELADAT Határozzátok meg az x valós szám azon értékeit, amelyekre $2\sqrt[3]{2x - 1} = x^3 + 1$.

4. FELADAT Határozzátok meg azon $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

a) $f(x) \leq \ln x$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$;

b) $f(x \cdot y) \leq f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a XI – a

1. FELADAT Legyenek $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $\det(A+B) = \det B \neq 0$ és $\operatorname{tr}(AB^{-1}) \neq 0$. Igazold, hogy az mátrix invertálható!

2. FELADAT Határozd meg az $a > 0$ számot tudva, hogy az $(n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1)$ szám egész része $n - 1$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esetén!

3. FELADAT Számítsd ki:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2023!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+2023)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

4. FELADAT

a) Adottak az $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ mátrixok. Határozd meg az x és y számokat tudva, hogy

$$AB = \begin{pmatrix} x & 7 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} \text{ és } BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & y \end{pmatrix}.$$

b) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ egy mátrix, ahol $a \in (0,1)$ és $b \in \mathbb{R}$.

(i) Igazold, hogy létezik két $(a_n)_{n\geq1}$ és $(b_n)_{n\geq1}$ valós számsorozat, azzal a tulajdonsággal, hogy $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén;

(ii) Számítsd ki $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

[1]Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2]Minden feladat kötelező;
[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a XII – a

1. FELADAT Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport, amelynek a semleges eleme e és $a \in G \setminus \{e\}$ egy elem azzal a tulajdonsággal, hogy $x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{2023}$, bármely $x \in G$ esetén.

a) Határozd meg a G csoportban az a elem rendjét;á

b) Igazold, hogy G egy Abel-féle csoport.

2. FELADAT Legyen $(G, \cdot)$ egy véges csoport, $f : G \to G$ a G csoportnak egy automorfizmusa és $h : G \to G$ egy olyan függvény, amely a $h(x) = x^{-1} f(x)$ összefüggéssel van értelmezve.

a) Igazold, hogy az f függvénynek akkor és csakis akkor van egyetlen fixpontja, ha a h függvény bijektív;

b) Igazold, hogy ha az f függvénynek egyetlen fixpontja van és $f \circ f = 1_G$, akkor a G csoport kommutatív.

Megjegyzés. Egy $a \in G$ elemet az $f : G \to G$ függvény fixpontjának nevezünk, ha $f(a) = a$. Egy $f : G \to G$ csoportmorfizmusról akkor mondjuk, hogy egyetlen fixpontja van, ha $f(x) = x \Leftrightarrow x = e$.

3. FELADAT Számítsd ki:

a) $I = \displaystyle\int \frac{x(x^2+1)}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx, \quad x \in (1, +\infty)$;

b) $J = \displaystyle\int_a^b \frac{c + a\sin^n x + b\cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)} dx$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $c > 0$, illetve $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $a + b = \frac{\pi}{2}$.

4. FELADAT Tekintsük az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ahol $I_0 = \frac{\pi}{4}$ és $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} x \, dx$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$esetén. Igazold, hogy:

a) $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén;

b) az $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat csökkenő, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{4}$.

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.